

**Debreceni Egyetem**  
**Informatikai Kar**

# **JÁTÉKELMÉLET**

Témavezető:  
Dr. Várterész Magda  
egyetemi docens

Készítette:  
Szabó Péter  
programtervező informatikus szak

Debrecen  
2010.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet és tiszteletemet mindenkinek, aki a diplomamunkám elkészítéséhez nagyban hozzájárult, elsősorban Dr. Várterész Magda Tanárnőnek, akinek tudása és előadasmódja inspirálólag hatott rám, és szüleimnek, akik biztosították számomra a tanuláshoz elengedhetetlen nyugodt környezetet.

# TARTALOMJEGYZÉK

|   |    |
|---|----|
| Köszönetnyilvánítás.....  | 2  |
| Tartalomjegyzék.....  | 3  |
| 0. Előszó.....  | 4  |
| 1. Bevezetés.....   | 6  |
| Játékos.....  | 8  |
| Stratégia.....  | 9  |
| A játék reprezentációja.....  | 9  |
| A kubai rakétaválság.....   | 9  |
| 2. Kétszemélyes játékok vizsgálata.....                                 | 15 |
| 2. 1. Zérusösszegű játékok.....   | 15 |
| 2. 1. 1. Nyeregponttal rendelkező játékok.....                          | 15 |
| Az első világháború kitörése.....                                       | 15 |
| Biztonsági szintet maximalizáló elv – Minimax és Maximin stratégia..... | 17 |
| Megoldás – Egyensúlypont.....   | 18 |
| Előnyök.....  | 19 |
| Hátrányok.....  | 20 |
| 2. 1. 2. Nyeregponttal nem rendelkező játékok.....                      | 21 |
| Várható nyereséget maximalizáló elv – Optimális kevert stratégia.....   | 21 |
| Megoldás.....   | 24 |
| Előnyök.....  | 25 |
| Hátrányok.....  | 25 |
| 2. 1. 3. Összefoglalás.....   | 26 |
| 2. 2. Változó összegű játékok.....                                      | 27 |
| 2. 2. 1. A fogolydilemma.....   | 27 |
| A racionalitás korlátai.....  | 28 |
| Szigorúan dominált stratégiák.....                                      | 29 |
| Megoldás.....   | 30 |
| Alternatív megoldás.....  | 31 |
| Többszörös fogolydilemma.....   | 31 |
| Axelrod verseny.....  | 32 |
| Összefoglalás.....  | 33 |
| Nash-egyensúly.....   | 33 |
| Előnyök.....  | 34 |
| Hátrányok.....  | 35 |
| 2. 2. 2. A csirkedilemma.....   | 36 |
| A trójai fogatverseny.....  | 36 |
| Játéktípusok.....   | 37 |
| Megoldás.....   | 38 |
| Összefoglalás.....  | 40 |
| 2. 2. 3. A visszahívás dilemmája.....                                   | 41 |
| Megoldás.....   | 41 |
| 3. Összefoglalás.....   | 43 |
| Táblázat- és képletjegyzék.....   | 45 |
| Irodalomjegyzék.....  | 46 |

## Előszó

„Az ember a szűkösen rendelkezésre álló javak és korlátozott lehetőségek világában él, ezért fontos, hogy hatékonyan és önérdékkövető módon viselkedjen.”<sup>1</sup> Az önérdékkövető viselkedés azonban sokszor konfliktushelyzetet teremt, mert sok esetben csak valakinek a kárára érhetünk el sikereket. Azonban nem árt számításba vennünk, hogy a nem kooperatív viselkedés hosszú távon nem biztos, hogy a legkifizetődőbb, a másokkal való együttműködésnek sokszor számos olyan előnye van, amely miatt megéri lemondani az önzésről.

Sokféle tudomány és tudományág kutatja az önérdékkövető viselkedés alapvető formáit, előnyeit és hátrányait, a lehetséges viselkedési stratégiákat, valamint azok társadalomra gyakorolt hatását. A közgazdaságtan, a döntéselmélet, a konfliktuskutatás, a biológia egyes részei, a politikatudomány és számos társadalomfilozófiai irányzat is foglalkozik a kérdéssel. A téma kellő körüljárásához ezért nem árt az interdiszciplináris szemlélet, vagy legalábbis a dolgok több szempontból való megvizsgálására való hajlam. Mi a játékelmélet segítségével és annak keretein belül fogjuk megvizsgálni a kérdést, néhol megengedve a kitekintést más tudományágak elért eredményeire is, hogy több nézőpont érvényesüljön, és ezáltal teljesebb képet nyújtsunk a vizsgált kérdésről.

A diplomamunka célja nem a játékelmélet teoretikus bemutatása, hanem a játékelméleti paradigma alkalmazása különböző kritikus döntési helyzetekre, érdekkonfliktusokra, társadalmi dilemmákra, játékokra. A dolgozat központi kérdése az, hogy létezik-e valamilyen univerzális módszer, valamilyen elv, amely mindig megmondja, hogy kritikus helyzetekben milyen döntéseket hozzunk? Továbbá: lehet-e racionálisan gondolkodva jó döntéseket hozni? Kit nevezhetünk racionálisan gondolkodó egyénnek, és mit takar ez lényegében? Kézzelfogható példák vizsgálatával megpróbálunk majd választ kapni ezekre a kérdésekre is.

Először röviden bemutatjuk a játékelmélet kialakulását és hátterét, ismertetjük az alapvető fogalmakat, majd rátérünk a konkrét példák vizsgálatára. Megpróbálunk megoldást találni a dilemmákra, esetenként több lehetséges megoldási módot is megvizsgálunk, és szót ejtünk az egyes módszerek előnyeiről és hátrányairól.

---

<sup>1</sup> Tóth I. János: Játékelmélet és társadalom, JATEPress, Szeged, 1997. 7. o.

Legvégül pedig sajnálattal megállapítjuk, hogy nem létezik univerzális, minden esetben használható módszer, és összegzésként levonjuk a tanulságot.

# 1. fejezet

## Bevezetés

A játékelmélet a többihez képest még viszonylag fiatal részterülete a matematikának, de magas iránta az érdeklődés a nem matematikusok körében is, mivel alkalmazási lehetőségei messze túlmutatnak a matematikán. Az elmélet megalapozója a magyar származású sokoldalú gondolkodó, Neumann János volt, aki a pókerjátékot vizsgálva alkotta meg a társas viselkedés matematikai leírását. A témával kapcsolatos első dolgozata 1928-ban jelent meg, a Morgensternnel közösen írt részletesebb leírás pedig 1944-ben született *John von Neumann – Oskar Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior* címen, mely munkát a huszadik század legjelentősebb tudományos eredményeinek egyikeként tartanak számon, és a mai napig a terület alapműve maradt.

Neumann előtt a játékokat kizárólag csak pszichológiai szempontok alapján vizsgálták, az ő érdeme abban állt, hogy megpróbált kifejleszteni egy működőképes, absztrakt matematikai eszköztárat a társas interakciók vizsgálatára. Előrelátó újítása, hogy a legkülönbélebb, bonyolult eltéréseket mutató játékokat megkísérelte egységes matematikai struktúrába foglalni és ezeket tisztán, egzakt matematikai eszközökkel vizsgálni. Nem véletlen, hogy a társas viselkedés kutatásában éppen a társasjátékok tanulmányozása hozta meg az áttörést, mivel ezek vizsgálata és leírása viszonylag egyszerűnek mondható, egyúttal pedig megtalálhatóak bennük a különféle konfliktusok főbb elemei, megjelenik és összekapcsolódik bennük a kölcsönös függőség, az önérdékkövetés és a szabálykövetés.

A játékelmélet egészen pontosan fogalmazva csak a **stratégiai játékok** elmélete: azaz csak olyan problémákkal foglalkozik, ahol a döntéshozóknak, vagy más néven a játékosoknak a játék kimenetelére a fennálló feltételek és szabályok keretei között befolyásuk van, és amelyekben általában egy vagy több emberrel szemben kell eredményes döntést hozniuk, vagyis bizonyos cselekvési tervek esetében a lehetséges stratégiák közül kiválasztani a legjobbat. Éppen ezért a tiszta szerencsejátékokat (pl. kockajáték, rulett) a játékelmélet nem vizsgálja, mert azok eredményei kizárólag a véletlenül múlnak, hiányzik belőlük a stratégiai elem. A pókerben éppen az az érdekes, hogy nem csupán a sors, hanem más emberek stratégiája ellen is jól kell teljesítenünk.

Első hallásra ugyan meglepő lehet, de a pókerjáték elméleti szempontból nem sokban különbözik például egy háborús konfliktustól. Minden játékos – a kártyajátékosok a pókerben éppúgy, mint a hadviselő felek a háborúban – nyerni szeretne, a saját nyeresége maximalizálására törekszik, igyekszik a játék/háború maga számára legelőnyösebb kimenetelét biztosítani. Azonban ha az egyik nyer, akkor mások szükségképpen veszítenek. A játékosok céljai tehát általában ellentétesek, ez a konfliktus alapja.

Ha érdekeik teljesen ellentétben állnak egymással, akkor **zérus- vagy állandó összegű** játékokról beszélünk, ami azt jelenti, hogy itt új érték nem jön létre, és nem is vesz el; amit az egyik játékos megnyer, azt a másik játékos elveszíti. A nevét pedig onnan kapta, hogy a nyereményeket pozitív nyereségként, a veszteségeket pedig negatív nyereségként számítva a játékosok nyereségeinek összege nulla (vagy  $c$  konstans, azaz állandó). A teljes ellentétén alapuló konfliktusok a gyakorlati életben viszonylag ritkák, de azokat az eseteket például, amikor két politikus indul ugyanazért a tisztségért, vagy két nagyvállalat ugyanazért a szerződésért versenyez nyugodtan tekinthetjük ilyennek, mert ezekben a helyzetekben nem lehet osztozni a sikeren, de ide sorolható az állami költségvetés – ahol egy meghatározott összeget osztanak szét az egyes területek között – és sok társasjáték is (pl. kétszemélyes kártyajátékok, sakk, stb.), így ezeknél a konfliktusoknál a zérusösszegű (állandó összegű) modell a leghasználatóbb.

A legtöbb társadalmi, politikai vagy gazdasági interakcióban azonban a játékosok között nincsen száz százalékos ellentét, egyaránt vannak közös és ellentétes érdekeik is. Szinte a legtöbb emberi interakció ellentétes és közös érdekek bonyolult kombinációja. Az ilyen játékokat **változó (nem zérus-) összegű** vagy *vegyes motivációjú, nem tiszta konfliktusos* játékoknak nevezzük. Ezekben a játékokban a játékosok nem csak egymástól nyerhetnek, hanem valamilyen a játékosokon kívüli tényező is a játékosok érdekeit szolgálja (pl. támogatás, adomány, természeti erőforrások, stb.). Mivel ezekben a játékokban a játékosok nyereségeinek összege nem állandó, a fő problémát itt az okozza, hogy a játékosoknak dönteniük kell arról, hogy a közös nyereségük maximalizálására törekednek-e, vagy a saját egyéni részesedésüket szeretnék minél inkább növelni; a két cél ugyanis legtöbbször egyidejűleg nem megvalósítható.

## Játékos

Játékos lehet egyetlen személy, de egyének egy olyan csoportja is, amelyik önálló döntéshozó egységként működik, például gazdasági küzdelmek esetén egy vállalat, háborús konfliktus esetén egy egész nemzet is, vagy bizonyos helyzetekben még a gének is tekinthetők annak, mindig attól függ, hogy melyik terület melyik problémáját vizsgáljuk. A lényeg a különböző érdekeltségű csoportokon van.

A játékosok száma szerint megkülönböztetünk egyszereplős játékokat, kétszereplős játékokat, valamint  $n$ -szereplős játékokat, ahol  $n > 2$  egész szám. Azokat a játékokat, ahol egyetlen szereplő hoz döntéseket, *természet elleni játéknak* is szokás nevezni, és formálisan ez a legegyszerűbb játéktípus.

Ettől sokkal érdekesebbek azok a játékok, ahol már kettő szereplő küzd egymással. Ezekben a játékokban természetesnek tekinthetjük az *egyensúlyhelyzetre* való törekvést, amelyen olyan stratégiák megválasztását értjük, amelyeknél jobbat egyetlen játékos sem választhat, feltéve, hogy a többi játékos is az egyensúlyhelyzetnek megfelelő stratégiát játssza. Ez azt jelenti, hogy mindegyik játékos, miután megtudja, hogy a többiek hogyan játszottak, utólag sem tud egy másfajta, számára kedvezőbb játékmódot találni. Más stratégiával sem javíthatna az eredményén, legfeljebb csak akkor, ha a többiek is változtatnak a stratégiájukon. Az egyensúlyhelyzetek vagy *egyensúlypontok* megkeresése a játékelmélet egyik lényeges feladata.

A harmadik csoportot a *többszemélyes játékok* képezik, amely két altípusra bontható. Az első az ún. *kooperatív játékok* csoportja. Ez a játéktípus lényegesen különbözik a kétszemélyes játékoktól: itt olyan problémákkal is találkozhatunk, amik két játékos esetén fel sem merülnek. Amint ugyanis megjelenik a játékban egy harmadik szereplő, bármelyik kettő szövetségre léphet egymással és koalíciót alkothat. Ezért a többszereplős játékok elmélete leginkább a koalíciók létrehozásával és felbomlásával foglalkozik, a koalíciók optimális méretét kutatja, továbbá azt vizsgálja, hogy egy koalíción belül a tagok hogyan részesülnek az együttes nyeresémből. Itt megjegyezzük, hogy szociológiai szempontból még további felosztást is alkalmazhatunk: lényeges különbség van ugyanis a kis létszámú csoportok (felső határa sokak szerint  $\approx 7$  fő) és a nagy létszámú csoportok között. A kis létszámú csoportok esetében lehetőség van a közvetlen vitára, megbeszélésre, tárgyalásra, így a tagok között könnyebben kialakulhat spontán kooperáció, míg a nagyobb létszámú csoportok esetében



nincs lehetőség a személyes kommunikációra, így csak különböző közvetett módszerekkel lehet megteremteni a kollektív együttműködés feltételeit.

A többszemélyes játékok elméletének másik válfajában – ún. *nemkooperatív játékok* – a koalíciók alakítása nincs megengedve, vagyis feltételezzük, hogy a játékosok között szövetségek nem jöhetnek létre, mondjuk a játék szabályai vagy törvényi tiltás miatt (pl. kartellelles törvény). Ez megint speciális helyzetet teremt.

Mi a továbbiakban a kétszemélyes játékokkal fogunk behatóbban foglalkozni.

## **Stratégia**

Stratégián a játékosoknak a játék kimenetelét befolyásoló tevékenységeit, döntéseit értjük.

A *stratégia* tehát egyfajta cselekvési terv, amely a játék során (elvileg) előálló bármely szituációban megmondja a játékosnak, hogy mit lépjen, milyen döntést hozzon. A játékos sorsa viszont nem csak saját cselekvéseitől függ, hanem a többi játékos cselekedeteitől is: ezt jelenti a kölcsönös függőség. Az egyes játékosok a stratégiáikat egymástól függetlenül választják meg, és stratégiáik megválasztásakor nem tudják, hogy a többi játékos milyen stratégiát választ. Ezért nem árt óvatosnak lenni, és jól átgondolni, hogy milyen elvek és megfontolások alapján választjuk ki azt a játéktervet, amely alapján játszani fogunk.

## **A játék reprezentációja**

Egy valós példán át – az 1962-es kubai rakétaválság segítségével – vizsgáljuk meg, hogy elvont módon hogyan adható meg egy játék leírása, reprezentációja.

(Egy háborús konfliktus esetében a „játék” szó használata bizonyos szempontból talán zavaró lehet, de a játékelmélet szempontjából ez nem releváns kérdés. A továbbiakban az összes vizsgált konfliktust ezzel a névvel fogjuk jelölni.)

### **A kubai rakétaválság <sup>2</sup>**

Az USA hírszerzése 1962. október 14-én arról értesült, hogy az ország területét elérni képes nagy hatótávolságú nukleáris rakétákat telepítettek Kubába. A jelentés szerint a rakéták 10 napon belül bevetethetők lettek volna. A kormány létrehozott egy válságstábot, amely hat

---

<sup>2</sup> J. S. Brams: *Superpover Games*, Yale University Press, 1985. 48-62. o.

napon keresztül titokban ülésezett és elemezte a kialakult helyzetet. Megoldásként több alternatívát is fontolóra vettek, ám végül két megoldási lehetőség maradt az asztalon:

- (A) Egy tengeri blokádnak a további szovjet rakétaszállítások megakadályozására, majd tárgyalások a Szovjetunióval annak érdekében, hogy rábíráják a már telepített rakéták kivonására.
- (B) Egy légitámadás a rakéták ellen, amelyet esetleg követett volna a sziget megszállása.

A szovjet politikusok a következő alternatíva előtt álltak:

- (a) Visszavonják a rakétáikat.
- (b) Kubában hagyják a rakétákat.

A vizsgált konfliktushelyzet egy véges, változó összegű, kétszemélyes játék, ahol a játékosok az USA és a Szovjetunió, (A) és (B) valamint (a) és (b) pedig az egyes játékosok lehetséges stratégiái. Mivel a játék kimenetele a játékosok számára nem közömbös, ezért először is szükség van a lehetséges kimenetek meghatározására, majd pedig annak megállapítására, hogy az esetleges kimenetek mennyire előnyösek ill. hátrányosak számukra. Azaz minden játékos esetében fel kell állítani a kimenetek között egy **preferencia-sorrendet**, amely azt jelenti, hogy a játék bármely két  $K_1$  és  $K_2$  kimenetele között a  $K_1 \geq K_2$  vagy a  $K_1 \leq K_2$  reláció áll fenn, ahol  $K_1 > K_2$  például azt jelenti, hogy a játékos számára a  $K_1$ -gyel jelölt kimenetel előnyösebb a  $K_2$  kimenetelnél.

Mivel a játékelmélet alapproblémájának megfogalmazásához és alapvető tételeinek kimondásához elegendő a játék kimeneteleinek rendezettsége, illetve ennek a ténynek a felhasználása, ezért hangsúlyozzuk, hogy a relációs jelek itt kizárólag csak a rendezettség jelölésére szolgálnak. Tehát ezekkel a számokkal matematikai műveleteket nem végezhetünk, csak arra valók, hogy a következmények között valamilyen sorrendet állítsanak fel. Ezt *ordinális hasznosságnak* nevezzük. Egyes esetekben az is előfordulhat majd, hogy a számok a preferencia-sorrend mellett a hasznossági szintet is kifejezik, de ezt külön jelezni fogjuk. Ilyenkor *kardinális hasznosságról* beszélünk.

Azt a függvényt, amelyik a játék kimeneteleinek halmazán létrehoz egy rendezettséget, **kifizetőfüggvénynek** nevezzük. A játékelmélet feltételezi, hogy a játékosok pontosan tisztában vannak saját (legalábbis vélt) érdekeikkel, értékrendjükkel, tehát képesek a számukra való hasznosság szerint sorrendbe állítani a lehetséges kimeneteleket. Továbbá azt is feltételezzük,

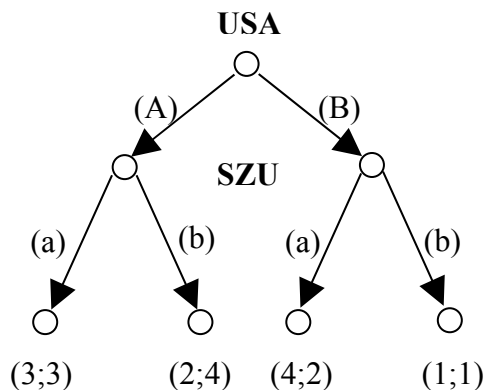
hogy a játékosok tisztában vannak a játék szabályaival, és ismerik az összes szereplő lehetséges stratégiáit és a különféle lejátászások végén várható kifizetéseket is – ezt hívjuk **teljes információs** játéknak.

Ennek megfelelően a kimenetek és kifizetések a következők (az első szám az USA, a második szám a SZU kifizetéseit jelöli):

- Ha mindkét fél kooperatív (Aa), akkor megegyezés. (3 ; 3)
- Ha az USA beleegyezik a szovjet rakéták kubai állomásoztatásába (Ab), akkor szovjet győzelem, amerikai vereség. (2 ; 4)
- Ha az amerikai fenyegetés hatására az oroszok kivonják a rakétáikat (Ba), akkor amerikai győzelem, szovjet vereség. (4 ; 2)
- Ha mindkét fél agresszíven lép fel, akkor a rakéták kubai állomásoztatása illetve a légicsapás (Bb), feltehetően nukleáris háborúhoz vezet. A konfliktusnak mindkét fél számára ez a legkedvezőtlenebb kimenetele, tehát a kifizetések: (1 ; 1).

Mostmár mindenünk megvan ahhoz, hogy a játékot átláthatóbb formában is ábrázolni tudjuk. Dolgozhatunk például az **extenzív vagy játékfá formájú** ábrázolással, ahol egy döntési fával, vagyis egy fa-gráffal adjuk meg a játékot. Az elágazási pontok – a kiinduló pontot is ide értve – a játékosok döntési pontjai, azaz minden elágazási ponthoz egyetlen játékos van hozzárendelve, akinek véges sok alternatíva között kell választania, azaz tovább lépnie, s ahol a döntési lehetőségeket, vagyis a választható stratégiákat a fa ágai jelölik, a végpontokhoz pedig a játék kimeneteleihez tartozó kifizetéseket írjuk. Feltesszük továbbá, hogy minden játékos tudja előre, hogy melyik ponthoz van ő rendelve, és ha sorra kerül, ismeri a játék addigi lefutását, valamint ismeri a többi játékos stratégiahalmazát és a kifizetéseket is, azaz az egész fáról teljes információja van.

A kubai rakétaválság a következő játékfával ábrázolható:



1. A kubai rakétaválság - játékfa formájú reprezentáció

Ez a felírási mód ugyanakkor érzékeltet egyfajta időbeliséget is, ezért mi a másik, ún. **stratégiai vagy normál** felírási formát fogjuk használni, ahol véges kétszemélyes játék esetében egyszerűen ábrázolható a probléma egy táblázat segítségével, mivel ilyenkor a kifizetőfüggvények véges halmazon értelmezett valós függvények. Ez a választás önkényes és élhetnénk a játékfa nagyobb kifejező erejével is, de az egyszerűbb felírás kedvéért lemondunk az időbeli dimenzió érzékeltetéséről.

Egy  $n$ -személyes játék normál formájú reprezentációja megadja a játékosok  $S_1, \dots, S_n$  stratégiahalmazait, valamint az  $u_1(s_1, \dots, s_n), \dots, u_n(s_1, \dots, s_n)$  kifizetőfüggvényeket, melyeknek értelmezési tartománya általában a stratégiahalmazok  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  direkt szorzata, értékészlete pedig a valós számok valamely részhalmaza. Jelölje ezt a játékot:

$$G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}.$$

A vizsgált kubai válság egy  $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$  véges kétszemélyes játék, és a következő táblázattal írható fel:

|                     |                 | Szovjetunió   |            |
|---------------------|-----------------|---------------|------------|
|                     |                 | visszavon (a) | kitart (b) |
| Egyesült<br>Államok | beleegyezik (A) | 3 ; 3         | 2 ; 4      |
|                     | légitámadás (B) | 4 ; 2         | 1 ; 1      |

2. A kubai rakétaválság - normál formájú reprezentáció

Először is meg kell adnunk a játékban részt vevő játékosokat (megkülönböztetünk egy sor- és egy oszlopjátékost), másodsor pedig a játékosok lehetséges döntési terveit, azaz a stratégiahalmazokat, harmadszor pedig a stratégiakombinációk halmazán értelmezett kifizetőfüggvényeket. Az egyes cellákban a bal oldali szám a sorjátékos kifizetését jelöli, a jobb oldali pedig az oszlopjátékosét.

Jelen példánkban az Egyesült Államok sort választ, a Szovjetunió pedig oszlopot, azaz mindkét játékos a lehetséges stratégiái közül – az USA az (A) és (B) stratégia, a SZU pedig az (a) és (b) stratégia közül – kiválasztja az egyiket.

Miután mindkét fél kiválasztotta azt a stratégiát, amely alapján játszani fog, a játék menete meghatározottá válik, leolvashatjuk a kifizetéseket, a játék lejátszottnak tekinthető. Például ha az USA a (B) stratégiát választja, a SZU pedig az (a)-t, akkor a megfelelő sor és oszlop metszéspontjából leolvashatóak a kifizetések: 4 ; 2, tehát az Egyesült Államok kifizetése 4 lesz, a Szovjetunióé pedig 2. Ez azt jelenti, hogy az amerikaiaknak sikerült a konfliktus számukra legkedvezőbb kimenetelét elérni, tehát a legnagyobb kifizetést megszerezni, a szovjeteknek viszont meg kell elégedniük a számukra második legrosszabb végeredménnyel, a második legrosszabb kifizetéssel.

A kubai rakétaválság vizsgálatát ennél a pontnál abbahagyjuk, de reprezentációjára egy későbbi helyen még visszatérünk, s ott adjuk majd meg a játék lehetséges megoldását is.

Talán ebből a példából is látható, hogy a valós világ bonyolult és sokszor nehezen érthető szerkezetéből egy játékelméleti modell felállítása nem mindig egyszerű feladat. Egy vizsgált rendszernek a valóságban általában lényegesen több jellemzője van, mint amennyit egyidejűleg figyelembe tudunk venni a matematikai modellezés és annak számítástechnikai realizációja folyamán. A társadalomtudományok és gazdaságtudományok területén dolgozó kutatóknak sokszor magának a játéknak a korrekt felírása, a részletek gondos feltárása, a reprezentáció helyes elkészítése okozza a legtöbb problémát.

Hogy sikeresen alkalmazhassuk a játékelméleti eszköztárat valós problémák megoldásában, először is helyes konfliktusleírásra, reprezentációra van szükségünk: ha a konfliktus mibenlétét félreértjük és helytelen reprezentációval dolgozunk, akkor a rá adott megoldás is helytelen és a valóságban használhatatlan lesz. Ez a szakembereket komoly kihívások elé állítja.

Mi a továbbiakban ezzel a problémával nem foglalkozunk, a vizsgált játékok felírását adottnak és helyesnek tekintjük, és ezekre keresünk jól használható megoldási módszereket, csak szeretnénk volna jelezni, hogy milyen súlyos gyakorlati, konceptuális problémák adódhatnak az alkalmazói területen.

## 2. fejezet

### Kétszemélyes játékok vizsgálata

#### 2. 1. Zérusösszegű játékok

Amint azt a bevezető részben is említettük, a zérusösszegű játékok olyan szituációkat írnak le, amelyekben a játékosok érdekei a lehető legélesebben szembenállnak, a preferenciáik teljesen ellentétesek.

A következőkben a zérusösszegű játékok tulajdonságait és megoldási módjait fogjuk közelebbről megvizsgálni.

##### 2. 1. 1. Nyeregponttal rendelkező játékok

###### Az első világháború kitörése <sup>3</sup>

Ebben a konfliktusban az egyik játékos az Ausztria és Németország alkotta kettős szövetség, a másik játékos pedig Oroszország volt. Szerbia – Oroszország szövetségese – visszautasította az osztrák ultimátumot, amely azt követelte, hogy Ausztria vizsgálatot folytathasson Szerbiában Ferenc Ferdinánd meggyilkolásának ügyében. A szerb visszautasítás után az osztrák-német szövetségnek el kellett döntenie, hogy megpróbáljon-e kompromisszumot kötni a szerbekkel, vagy beváltsa fenyegetését, és erőszakkal vegyen elégtételt. Oroszországnak arról kellett döntenie, hogy megszegje-e a Szerbia támogatására tett ígéretét, vagy mozgósítsa katonai erejét a szerbek védelmében.

Nézzük a Németország és Ausztria alkotta koalíció preferenciáit. A legjobb kimenetel számukra az lenne, ha az oroszok cserbenhagynák Szerbiát, mialatt ők támadnak, ezáltal Ausztria átvenné az ellenőrzést Szerbia felett, Oroszország pedig elvesztené balkáni befolyását (DK). A második legjobb kimenetel számukra az elégtétel, értve ezalatt a háborút, azt is vállalva, hogy Oroszország nem hagyja cserben Szerbiát (DD). A harmadik legjobb kimenetel, ha valamiféle kompromisszumra jutnak Szerbiával, akit az oroszok cserbenhagynak, mivel ez esetben azért az oroszok bizonyos mértékű befolyása a térségre

---

<sup>3</sup> G. H. Snyder és P. Diesing: Conflict Among Nations. Princeton University Press, 1977.

megmarad (KK). Végül a legrosszabb eredmény akkor következik be, ha az oroszok erőt demonstrálnak, az osztrák-német kettős szövetség pedig lemond a támadásról, így a szerb agitáció folytatódik, az osztrák birodalom pedig presztízsét veszti és jelentősen meggyengül (KD). Ez a preferencia-sorrend erősen vitatható és vitatandó is, de mi helyesnek fogadjuk el, és a továbbiakban eszerint vizsgálódunk.

Feltéve, hogy a számok kardinális hasznosságot is kifejeznek, a játék zérusösszegűnek tekinthető. Ekkor így néz ki a játék normál formájú reprezentációja:

|                           |           | Oroszország                   |                           |
|---------------------------|-----------|-------------------------------|---------------------------|
|                           |           | Szerbia<br>cserbenhagyása (K) | Szerbia<br>támogatása (D) |
| Ausztria –<br>Németország | kitér (K) | 2                             | 1                         |
|                           | támad (D) | 4                             | 3                         |

### 3. Az első világháború kitörése - normál formájú reprezentáció

Mivel a nullaösszegű játékokban az oszlopjátékos preferencia-sorrendje éppen az ellentéte a sorjátékosénak, ezért a táblázatban általában csak a sorjátékos preferenciáit szokták feltüntetni, a másik játékos preferenciái abból értelemszerűen kikövetkeztethetők.

Ha még egyszerűbben szeretnénk a problémát vizsgálni, akkor lehetőség van a következő mátrixos ábrázolásra is, ahol **A** mátrix a sorjátékos számára történő kifizetést jelöli, **B** mátrix (ami **A**-nak pontosan az ellentéte) pedig az oszlopjátékosét:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{és } \mathbf{B} = -\mathbf{A})$$

### 4. Az első világháború kitörése - mátrixos ábrázolás

Ezen ábrázolásból fakadóan a véges, kétszemélyes, zérusösszegű játékokat szokás **mátrixjátékoknak** is nevezni.

Vizsgálatunk kulcskérdése: Milyen elvek és megfontolások alapján választanak ill. válasszanak stratégiát a játékosok az ehhez hasonló zérusösszegű játékokban?



## Biztonsági szintet maximalizáló elv – Minimax és Maximin stratégia

A játékelmélet szerint minden játékos igyekszik a lehető legtöbb nyereményt biztosítani a maga számára egy intelligens ellenféllel szemben, akit ezzel épp ellentétes cél vezérel. Mivel feltevésünk szerint racionális játékosok játszanak egymással, ezért mindig abból kell kiindulunk, hogy a másik játékos mindig a saját számára legkedvezőbb döntést fogja meghozni, a másik kára pedig nem fogja megváltoztatni. Jóindulatot tehát nem tételezhetünk fel a másik játékos részéről, ezért a legrosszabb eshetőségre is fel kell készülnünk, sőt egyenesen ebből kell kiindulnunk. Az Egyesült Államok katonai doktrínája is hasonló ehhez: elő van írva, hogy a tábornokok ne azt vegyék figyelembe, amit az ellenség tenni akar – tehát a szándékait –, hanem azt, amit meg tud tenni – tehát a lehetőségeit –. Ezt figyelembe véve kell meghatároznunk a saját stratégiánkat.

Előtérbe kerülnek tehát a biztonsági megfontolások, és minden racionális játékos igyekszik kizárni a számára legrosszabb következmény előfordulásának lehetőségét. Ezért az ilyen zérusösszegű játékokban azt szokták tanácsolni a „legkisebb rossz” elve alapján, hogy maximalizáljuk a *biztonsági szintünket* (definíció szerint az egyes stratégiákhoz tartozó legkisebb nyeremény az adott stratégia biztonsági szintje), azaz a lehetséges legrosszabb kimenetek közül a legjobbat válasszuk. Ez úgy történik, hogy a játékos kiválasztja az egyes stratégiáihoz tartozó legkisebb nyereséget, aztán pedig azt a stratégiát választja, ahol ez a minimális érték a legnagyobb.

Ha az osztrák-német szövetség a  $K$  stratégiáját szeretné választani, akkor az elérhető lehetséges legkisebb nyeremény, vagyis ezen stratégia biztonsági szintje 1 (az ellenfél  $D$  stratégiája mellett). Ha pedig a  $D$  stratégiáját játssza, akkor a lehetséges legrosszabb kimenetel, vagyis a biztonsági szint 3 (szintén az ellenfél  $D$  stratégiája mellett). A biztonsági szintet maximalizáló elv szerint az osztrák-német szövetségnek támadnia kell ( $D$ ), mivel a támadó stratégia biztonsági szintje a legnagyobb.

Mivel az ezen stratégiához tartozó nyeremény éppen a soronkénti legkisebb (minimum) értékek közül a legnagyobb, ezt a stratégiát **maximin** stratégiának nevezik. A maximin stratégia előnye, hogy a legokosabb rivális ellen is biztosítja a legrosszabb kimenetek közül a legjobbat, kevésbé okos ellenféllel szemben pedig még jobb eredményt is.

Ha megnézzük az orosz játékos preferenciáit, akkor azok éppen ellentétesek az osztrák-német szövetséggel. Az oszlopjátékosnak tehát az az érdeke, hogy a sorjátékos kifizetése, vagyis a táblázatban szereplő érték minél kisebb legyen, így az ő stratégiáinak a biztonsági

sintjét az oszloponkénti legnagyobb elem adja, célja pedig az, hogy ez az érték minél kisebb legyen. Ha Oroszország a  $K$  stratégiája szerint játszik, akkor a számukra legrosszabb elérhető nyeresemény a 4-es, ha a  $D$  stratégiája szerint játszik, akkor pedig a 3-as. Mivel ezen értékek közül számukra a kisebb a kedvezőbb, az oroszoknak a  $D$  stratégiát kell választaniuk, tehát Szerbia támogatását.

Mivel az ezen stratégiához tartozó kifizetés az oszloponkénti legnagyobb (maximum) értékek közül a legkisebb, ezért ezt a stratégiát **minimax** stratégiának nevezik.

Az előbb elmondottak miatt mindkét játékos a  $D$  stratégiáját fogja választani:

|                   | Szerbia<br>cserbenhagyása (K) | Szerbia<br>támogatása (D) | Sorok<br>minimuma |
|-------------------|-------------------------------|---------------------------|-------------------|
| kitér (K)         | 2                             | 1                         | <u>1</u>          |
| támad (D)         | 4                             | 3                         | <u>3</u>          |
| Oszlopok maximuma | 4                             | <u>3</u>                  |                   |

#### 5. Az első világháború kitörése – minimax és maximin stratégiák

#### Megoldás – Egyensúlypont

Esetünkben a maximin és minimax stratégiához tartozó kifizetés ugyanaz lesz, vagyis 3. Ilyen helyzetekben azt mondjuk, hogy a maximin és minimax stratégiák *egyensúlyban* vannak, a hozzájuk tartozó következményt pedig **egyensúlypontnak** vagy **nyeregpontnak** ill. a játék megoldásának nevezzük. A nyeregponttal rendelkező mátrixjátékokban a nyeregponthoz tartozó stratégiákat optimálisnak lehet tekinteni, ami azt jelenti, hogy ettől eltérő stratégia megválasztásával sem tudna javítani eredményén egyik játékos sem, feltéve, hogy az ellenfél az egyensúlyi stratégiáját játssza. Ha minden játékos az egyensúlyi stratégiáját játssza, akkor egyensúlyi helyzet alakul ki, ami egy stabil állapot. Senki sem bánja meg utólag a döntését, mert arra a kérdésre, hogy szert tehetett volna-e nagyobb nyereseményre, ha más stratégiát választ, mindenki nemmel fog felelni.

## Előnyök

Az egyensúlyi stratégia előnye, hogy a játékos az ellenfél stratégia választásától függetlenül biztosíthat a maga számára egy előre meghatározható *relatív nyereségmaximumot*, garantálhatja maga számára (legalább) *a játék értékét* (ami nyeregponttal rendelkező játékokban a nyeregpont hasznosságával egyenlő). Lényeges dolog, hogy ezáltal lemondhatunk a másik játékos viselkedésének befolyásolásáról, mert a relatíve legjobb nyereményt ettől függetlenül is biztosítani tudjuk a magunk számára. Bizonyos értelemben tehát a nyeregponttal rendelkező játékok *szigorúan determináltak*.

Ha egy mátrixjáték rendelkezik nyeregponttal, az azt jelenti, hogy létezik olyan  $i$  és  $j$  indexpár, hogy  $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_i$  és  $\mathbf{y}^* = \mathbf{e}_j$  egyensúlyi stratégiák (ahol  $\mathbf{e}_j$  a  $j$ -edik egységvektort jelöli).

Ekkor:

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} = \mathbf{e}_i \mathbf{A} \geq v \mathbf{1} = a_{ij} \mathbf{1}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{y}^* = \mathbf{A} \mathbf{e}_j \leq v \mathbf{1} = a_{ij} \mathbf{1}$$

Vagyis létezik egy olyan  $v$  szám (a játék értéke), valamint a sorjátékos egy olyan tiszta stratégiája (maximin stratégia), amely legalább  $v$ -t biztosít a számára, illetve az oszlopjátékos olyan tiszta stratégiája (minimax stratégia), amelyik garantálja, hogy a sorjátékos legfeljebb  $v$ -t kap.

Mátrixjátékok esetében viszonylag könnyen megkereshető, hogy van-e a játéknak nyeregpontja, csak azt kell megvizsgálni, hogy van-e olyan  $a_{ij}$  mátrixelem, ami egyszerre minimuma a saját sorának és maximuma a saját oszlopának.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ebben az esetben ez csak a 3-as kifizetésre teljesül, tehát ez a mátrixelem a játék egyetlen nyeregpontja, továbbá a játék értéke és megoldása. Az előbb elmondottak miatt racionális játékosnak azt nevezzük, aki a nyeregponthoz tartozó stratégiát játssza.

Ha egy zérusösszegű játék egynél több egyensúlyponttal rendelkezik, akkor mindegy, hogy a játékos melyiket választja, mert ezekben a játékokban minden egyensúly *ekvilalens*, vagyis ugyanaz az értéke, és az egyensúlyi stratégiák *felcserélhetők*, vagyis bármely két

egyensúlyi stratégia metszetében egy egyensúlypont található, így tulajdonképpen bármelyiket választhatjuk.

## Hátrányok

Viszonylag kevés olyan játék, azaz mátrix van, amely rendelkezik nyeregponttal, ezért ez a módszer csak igen korlátozott körben használható. A következő részben mutatjuk be azokat a játékokat, amelyek nem rendelkeznek nyeregponttal<sup>4</sup>.

Megfigyelhetjük, hogy a valóságban is a játékelmélet által előrejelzett megoldás következett be, vagyis mindkét fél a biztonsági szintje maximalizálására törekedett és az egyensúlyi stratégiáját játszotta, s ez az első világháború kitöréséhez vezetett. Retrospektíve elemezni egy problémát persze túlságosan könnyű, mert így lehetőségünk nyílik olyan reprezentáció, azaz olyan nyereségmátrix megalkotására, ami pontosan a kívánt nyeregpontot és megoldást szolgáltatja. Ezért is hangsúlyozzuk újra, hogy a reprezentáció helyes elkészítésén nagyon sok múlik. Ha 1914-ben a játékosok másként értékelték volna az egyes kimeneteket, tehát eltérő preferenciákkal dolgoztak volna, akkor talán más, kedvezőbb megoldás is születhetett volna.

---

<sup>4</sup> A kevert stratégiák fogalmának bevezetésével ezekben a játékokban is található egyensúlypont. Bővebben ld. a következő fejezetet.

## 2. 1. 2. Nyeregponttal nem rendelkező játékok

Léteznek olyan játékok is, ahol a biztonsági szintet maximalizáló elv nem használható. Gondoljunk például a közismert „Kő-Papír-Olló” játékra. A játékosok három jelet mutathatnak: követ, papírt vagy ollót. A kő legyőzi az ollót, a papír legyőzi a követ, az olló legyőzi a papírt. Győzelemért 1 pont jár, veszteséért  $-1$  pont. Ha ugyanazt mutatják, akkor döntetlen, tehát 0 pont. Ez alapján a játék táblázata a következőképpen alakul:

|                    |       | Másik játékos |      |       | Sorok minimuma: |
|--------------------|-------|---------------|------|-------|-----------------|
|                    |       | Kő            | Olló | Papír |                 |
| Egyik játékos      | Kő    | 1             | 0    | $-1$  | $-1$            |
|                    | Papír | $-1$          | 1    | 0     | $-1$            |
|                    | Olló  | 0             | $-1$ | 1     | $-1$            |
| Oszlopok maximuma: |       | 1             | 1    | 1     |                 |

### 6. Kő-Papír-Olló játék - normál formájú reprezentáció

Ezekben a játékokban az előbb használt elv alapján nem tudjuk megmondani, hogy melyik stratégiát érdemes választani. Ezért más módszerre lesz szükségünk, ha tanácsot szeretnénk adni a játékosoknak a stratégiaválasztást illetően.

**Neumann tétele** szerint minden kétszemélyes, véges, zérusösszegű és teljes információjú játékban található egy egyensúlypont. De ehhez szükség van a kevert stratégiák fogalmának bevezetésére.

### Várható nyereséget maximalizáló elv – Optimális kevert stratégia

Megfigyelhetjük, hogy nyeregponttal rendelkező játékban a játékosnak nem származhat kára abból, ha ellenfele megtudja, hogy az optimális, azaz egyensúlyi stratégiáját szándékozik játszani, viszont káros lehet, ha ellenfele előre megtudja, hogy nem egyensúlyi stratégiát választott. Ezzel szemben a nyeregpont nélküli játékokban mindig káros, ha az ellenfelünk előre értesül a stratégiaválasztásunkról, ezért érdemes ezt eltitkolni előle.<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Zagare, F. C.: Játékelmélet – Fogalmak és alkalmazások. Helikon Kiadó, 2006. 41. o.

Ha a játékot ismételtten sokszor lejátszzák, és az egyik játékos mindig ugyanazt az általa megfelelőnek tartott stratégiát játssza (például mindig követ mutat), akkor ellenfele hamar kiismerheti és megteheti a megfelelő válaszlépéseket. Ezért minden játékosnak érdekében áll a stratégiáit játékról-játékra változtatnia. Hosszú távon viszont nem jó megoldás, ha a játékos egy előre kitalált, determinisztikus szabály alapján (pl. két stratégiát felváltva) játszik, mert bármily bonyolult legyen is egy ilyen szabály, mégiscsak szabályszerű, tehát előbb-utóbb megfejthető, kitalálható.

Neumann javaslata ezért az volt, hogy nyeregpont nélküli mátrixjátékokban érdemes a véletlenre bízni a stratégiaválasztást, vagyis valamilyen – a tiszta stratégiák fölött értelmezett – valószínűség-eloszlás alapján keverni a stratégiáinkat. Célszerű a játékosnak a stratégiahalmazán egy eloszlást definiálnia, és e szerint az eloszlás szerint véletlenül megválasztania a játék konkrét lejátékosakor választandó stratégiáját. Ezzel elérheti, hogy az ellenfélt meglepetésként érje a stratégiaválasztása.

Ekkor a játékosok stratégiahalmazai az  $S_k$  halmazokon értelmezhető eloszlások halmaza, kifizetőfüggvényei pedig az  $u_k$  függvények – valamennyi játékos által választott eloszlásokra vonatkozó – várható értékei. Az így adódó sztochasztikus játékot a ***G kevert bővítésének*** nevezzük.<sup>6</sup> Tegyük fel, hogy

$$S_k = \{1, 2, \dots, m_k\} \quad (1 \leq k \leq n),$$

és mivel az  $S_k$  halmazok végesek, a rajtuk definiált eloszlások  $m_k$ -dimenziós valószínűségi vektorokkal adhatók meg, így a játék kevert bővítésének stratégiahalmazai:

$$S'_k = \{ \mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_k = (x_1, \dots, x_{m_k}), \mathbf{x}_k \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^T \mathbf{x}_k = 1 \}$$

Szemléletesen esetünkben ez a következőt jelenti a sorjátékos részére:

„Válaszd az első sort  $x_1$  valószínűséggel, a második sort  $x_2$  valószínűséggel, a harmadik sort pedig  $x_3$  valószínűséggel, ahol  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  és  $x_3 \geq 0$  valamint  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ”.

Az egységvektor-stratégiákat ***tiszta stratégiáknak*** hívjuk, különben ***kevert stratégiákról*** beszélünk. A tiszta stratégia tehát a kevert stratégia speciális esetének tekinthető, amennyiben a valószínűség-eloszlás 1 valószínűséget rendel az egyik tiszta stratégiához és 0 valószínűséget az összes többi tiszta stratégiához.

<sup>6</sup> Szidarovszky F. – Molnár S.: Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó, 1986. 35. o.

Az optimális kevert stratégia meghatározása azon az elgondoláson alapul, hogy a játékosoknak érdemes a *várható nyereségüket* maximalizálni. Először is meg kell keresnünk a játék kevert egyensúlypontját. Ehhez nagy segítséget nyújtanak az operációkutatás illetve a lineáris programozás módszerei. A következő LP feladattal állunk ugyanis szemben:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 & \mathbf{1}^T \mathbf{y} = 1 \\ \underline{\mathbf{A}\mathbf{y} \leq \alpha \mathbf{1}} & \underline{\mathbf{A}^T \mathbf{x} \geq -\beta \mathbf{1}} \\ \alpha + \beta \rightarrow \min. \end{array}$$

#### 7. Mátrixjáték – Lineáris programozási feladat kapcsolata <sup>7</sup>

Egy  $\mathbf{x}^*$  és  $\mathbf{y}^*$  stratégiapár akkor és csak akkor egyensúlypont és  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  a sor- ill. oszlopjátékos kifizetőfüggvény-értéke, ha  $\mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{y}^*$ ,  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  optimális megoldása az előbbi lineáris programozási feladatnak, vagyis megengedett megoldás és a hozzá tartozó célfüggvényérték zérus. A játék  $v$  értékét ekkor az optimális  $\alpha$  célfüggvényérték adja.

Mivel a feltételekben  $\mathbf{y}$  csak az  $\alpha$ ,  $\mathbf{x}$  pedig csak a  $\beta$  mellett szerepel és a célfüggvény additív, ezért a feladat  $(\mathbf{y}, \alpha)$  és  $(\mathbf{x}, \beta)$  változók szerint szeparálható. Így a probléma két lineáris programozási feladattá bomlik, és mivel ezek mérete kisebb, mint az eredeti feladaté, a megoldáshoz is gyorsabban juthatunk hozzá.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 & \mathbf{1}^T \mathbf{y} = 1 \\ \underline{\mathbf{A}^T \mathbf{x} \geq -\beta \mathbf{1}} & \underline{\mathbf{A}\mathbf{y} \leq \alpha \mathbf{1}} \\ \beta \rightarrow \min. & \alpha \rightarrow \min. \end{array}$$

#### 8. Lineáris programozási feladatpár

A kő-papír-olló játékra alkalmazva ez a következőket jelenti:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>7</sup> Szidarovszky F. – Molnár S.: Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó, 1986. 43. o.

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + \beta \geq 0$$

$$x_2 - x_3 + \beta \geq 0$$

$$\underline{-x_1 + x_3 + \beta \geq 0}$$

$$\beta \rightarrow \min.$$

$$\mathbf{y} \geq 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_1 - y_3 - \alpha \leq 0$$

$$-y_1 + y_2 - \alpha \leq 0$$

$$\underline{-y_2 + y_3 - \alpha \leq 0}$$

$$\alpha \rightarrow \min.$$

Ugyanez a *Lingo* programban a következőképpen néz ki:

**MODEL :**

**MIN** = b;

x1 >= 0;

x2 >= 0;

x3 >= 0;

x1 + x2 + x3 = 1;

1\*x<sub>1</sub> + -1\*x<sub>2</sub> + b >= 0;

1\*x<sub>2</sub> + -1\*x<sub>3</sub> + b >= 0;

-1\*x<sub>1</sub> + 1\*x<sub>3</sub> + b >= 0;

**END**

**MODEL :**

**MIN** = a;

y1 >= 0;

y2 >= 0;

y3 >= 0;

y1 + y2 + y3 = 1;

1\*y1 + -1\*y3 - a <= 0;

-1\*y1 + 1\*y2 - a <= 0;

-1\*y2 + 1\*y3 - a <= 0;

**END**

## Megoldás

Megoldásként azt kapjuk, hogy  $b=0$ ,  $x_1=0.3333$ ,  $x_2=0.3333$ ,  $x_3=0.3333$  valamint  $a=0$ ,  $y_1=0.3333$ ,  $y_2=0.3333$ ,  $y_3=0.3333$ .

Vagyis:

$$\mathbf{x} = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \quad \beta = 0;$$

$$\mathbf{y} = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \quad \alpha = 0;$$

És mivel  $\alpha + \beta = 0$  valamint  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  kielégíti a feltételrendszereket, ez valóban a lineáris programozási feladat optimális megoldása. Ezért a kő-papír-olló játék optimális megoldása az, ha a játékosok  $1/3$  valószínűséggel véletlenszerűen keverik a három tiszta



stratégiájukat. Ez az eredmény egyébként teljesen megfelel ésszerű várakozásainknak. A játék értéke ekkor  $v = \alpha = 0$ .

### **Előnyök**

A fentebb bemutatott lineáris programozási feladatpár segítségével a játék bármely egyensúlypontja előállítható, és tetszőleges egyensúlypont esetén az első játékos kifizetőfüggvényének értéke egyenlő lesz a játék értékével.

A nyeregpont nélküli játékokban az optimális kevert stratégiák egyensúlyban vannak, és egyik játékos sem képes növelni a várható nyereményét azáltal, hogy más stratégiát választ. Az optimális kevert stratégiával bármelyik játékos biztosíthatja maga számára a játék értékét.

### **Hátrányok**

Az egyik komoly ellenvetés a kevert stratégiákkal szemben az egyszer játszott játékokban való alkalmazhatósága. Mert egy egyszer játszott játékban lényegében egyetlen tiszta stratégiát kell kiválasztania a játékosnak. Vajon van-e értelme ilyenkor egy véletlen valószínűség-eloszlás alapján választott tiszta stratégiának? Sokak szerint nincs. Könnyen ellentmondás léphet fel két előző alapelvünk között: kárára válhat a biztonsági szintünknek a várható nyeremény maximalizálására való törekvésünk. A várható vagy átlagos nyeremény fogalmának, vagyis annak a mennyiségnek, amiről feltettük, hogy a játékos maximalizálni szeretné, tulajdonképpen csak többször játszott játékok esetében van értelme.

Egy másik rejtett probléma, hogy olyan játékokban, ahol minden játékosnak háromnál több stratégiája van, az optimális kevert stratégia kiszámítása nem teljesen költségmenetes. Ezért kis téttel jellemezhető játékokban a játékosok sokszor inkább nem vállalják az optimális kevert stratégia meghatározásának (időbeli és/vagy pénzbeli) költségeit.

A harmadik probléma pedig a hasznosság fogalmával kapcsolatos. Ha a kardinális hasznosság meghatározására ill. mérésére nincs lehetőség, akkor az optimális kevert stratégiák fogalma és használhatósága megint megkérdőjeleződik. Sajnos számos gyakorlati esetben előfordul, hogy csak ordinális hasznosságokat tudunk meghatározni, így ezekkel a számokkal matematikai műveleteket nem végezhetünk.

### 2. 1. 3. Összefoglalás

„Létezik egy olyan  $v$  szám (a játék értéke), valamint a sorjátékos egy olyan tiszta vagy kevert stratégiája (maximin stratégia), amely legalább  $v$ -t biztosít a számára, illetve az oszlopjátékos olyan tiszta vagy kevert stratégiája (minimax stratégia), amelyik garantálja, hogy a sorjátékos legfeljebb  $v$ -t kap. Ezek a stratégiák egyensúlyban vannak, és az egyensúlyi stratégiák bármely párosítása egy maximin, illetve egy minimax stratégiát jelent a sor-, illetve az oszlopjátékosnak.”<sup>8</sup>

Ezt nevezzük más néven minimax tételnek, amelyet sokáig bebizonyíthatatlannak tartottak, míg végül von Neumann igazolta 1928-ban. Ez garantálja egy tiszta vagy kevert stratégiából álló egyensúly létezését minden véges, kétszemélyes, zérusösszegű, teljes információjú játékhoz. Az elmélet alkalmazhatóságát ugyanakkor valamelyest csökkentik a kevert stratégiákkal kapcsolatban felmerült problémák.

Mint ahogy azt a következő fejezetben látni fogjuk, a változó összegű játékok esetében új nehézségek jelentkeznek.

---

<sup>8</sup> R. D. Luce és H. Raiffa: Games and Decisions. Wiley, 1957.

## 2. 2. Változó összegű játékok

A változó összegű játékokat szokás *nem tiszta konfliktusos* játékoknak is nevezni, mert ezekben a játékokban a játékosok között nincs teljes érdekellentét. A játékosok nyereményeinek összege nem állandó.

A továbbiakban ezen játékok megoldási módjait fogjuk vizsgálni.

### 2. 2. 1. A fogolydilemma

A fogolydilemma a játékelméleti fejtegetések egyik alapproblémája, s talán leghíresebb játéka, amely rengeteg elméleti és gyakorlati kutatáshoz vezetett. Sokan, sokféleképpen megfogalmazták már, én R. M. Sainsbury leírásában szeretném bemutatni:

„Képzeld el a kedves Olvasó, hogy velem együtt letartóztatják, kábítószerrel való visszaélés vádjával. Elkülönített cellákban tartanak fogva bennünket. Az ügyvédünk mindegyikünkkel tudatja, hogy az ügyész a következőket forgatja a fejében (s megvan minden alapunk arra, hogy megbízzunk ezekben az információkban):

- (1) Ha mindketten megtagadjuk a vallomást és hallgatunk, az ügyész bizonyíték hiányában ejteni fogja a kábítószerrel való visszaélés vádját, s mindkettőnket engedély nélküli fegyverviseléssel fog megvádolni, amiért sokkal enyhébb büntetésre számíthatunk: egy-egy év börtönre.
- (2) Ha mindketten vallomást teszünk, mindketten öt évet kapunk.
- (3) Ha egyikünk vall, a másik tagad, akkor azt, aki vall, szabadon bocsátják, aki hallgat, tíz évet ül.
- (4) Az (1)-(4) pontokban foglaltakat társunkkal is tudatták.

Mit tegyünk, ha racionálisan akarunk cselekedni?

Figyelembe kell vennünk továbbá, hogy:

- (5) Mindketten a lehető legkisebb büntetést szeretnénk.
- (6) Egyikünknek sem áll rendelkezésére semmiféle információ a másik viselkedéséről, leszámítva, hogy rá is igaz (5), s hogy ő is racionálisan cselekszik.”<sup>9</sup>

Tehát, hogyan cselekedjek?

<sup>9</sup> R. M. Sainsbury: Paradoxonok. Typotex Kiadó, 2002. 80-81. o.

|    |            | Másik fogoly |          |
|----|------------|--------------|----------|
|    |            | vall         | nem vall |
| Én | vallok     | -5 ; -5      | 0 ; -10  |
|    | nem vallok | -10 ; 0      | -1 ; -1  |

#### 9. A Fogolydilemma - normál formájú reprezentáció

Egyszerű és meggyőző érvelés szól amellett, hogy jobban járok, ha vallomást teszek: bárhog is döntsön a másik fogoly, én mindig kedvezőbb helyzetbe kerülök, ha vallok.

Tegyük fel, hogy a „társam” megtagadja a vallomást. Ekkor két lehetőségem van: vagy megtagadom én is, és így 1 évet kell ülnöm, vagy vallok, és így szabadon engednek. Ez esetben jobban járok, ha vallok.

Most tegyük fel, hogy a „társam” vallomást tesz. Ekkor is két lehetőségem van: vagy megtagadom a vallomást, és így 10 évet kényszerülök majd börtönben tölteni, vagy vallok, és ezáltal csak 5 évet kapok. Ebben az esetben is jobban járok, ha vallok.

A levonható következtetés ez: bármit is csinál a társam, én mindenképpen jobban járok, ha vallok, vagyis vallanom kell. Mivel a társam és én teljesen hasonló helyzetben vagyunk és feltettük, hogy mindketten racionális emberek vagyunk, ezért feltehetőleg hasonlóan fogunk gondolkodni, így pedig valószínűleg ugyanarra a következtetésre jutunk. Ha nekem az tűnik racionális döntésnek, hogy mindenképpen vallanom kell, akkor ezzel a másik fogoly is így lesz, és ő is vallomást fog tenni. Így viszont mindketten 5 évet kapunk a kedvezőbb 1-1 év helyett, amit akkor kapnánk, ha mindketten hallgatnánk.

#### A racionalitás korlátai

A racionálisnak tűnő gondolkodás eredménye tehát az lesz, hogy mindketten rosszabbul járunk, mint ahogy egyéb esetben járhatnánk. Felmerülhet a kérdés, hogy mennyire tekinthető egy döntés racionálisnak, ha rosszabb eredményhez vezet, mint ha máshogy döntöttünk volna? Mennyire nevezhető racionálisnak az az érvelés, amely végül kevesebb nyereséget biztosít számunkra, mintha máshogy okoskodtunk volna? Nem a nyereség maximalizálása, tehát a minél kevesebb büntetés a cél? Nem azt a gondolkodási mintát kellene racionálisnak neveznünk, amelyik végül kedvezőbb kimenetelre vezet?

Talán lehangoló meglátás, de a racionális cselekvés bizonyos körülmények között valóban rosszabb eredménnyel jár, mint ha másként cselekednénk.

Ismerünk olyan eseteket, amikor az ésszerűtlenül sokat kockáztató szerencsejátékosok nagy összegeket nyertek, a racionális játékosoknak pedig be kellett érniük szerényebb nyereményekkel. A fogolydilemma esetében viszont az a meghökkentő, hogy a gyengébb eredmény nem szerencse vagy balszerencse eredménye, hanem a racionális gondolkodás előrelátható következménye. Mindebből levonhatjuk azt a következtetést, hogy nem mindig a racionalitás a legjobb tanácsadó, mert néhány esetben előfordulhat, hogy javaslatait figyelmen kívül hagyva jobban járhatunk.

### Szigorúan dominált stratégiák

A legtöbb játékos fogolydilemma helyzetben azért nem vállalja a hallgatást, mert nagyon kockázatos, túl sokat veszíthet vele. Az emberek többsége pedig fél a társa árulásától. Ha én hallgatok, mert mondjuk elfogásunk előtt megegyeztünk benne, hogy mindketten hallgatni fogunk, akkor a társam érdeke az lesz – tudván, hogy én hallgatni fogok –, hogy ő eltérjen ettől a megállapodástól, és ígéretét megszegve valljon, mert ez esetben jobban jár, mintha tartaná magát az egyezéshez. Így viszont az én büntetésem 10 év lesz, tehát a legrosszabb kimenetel. Ezt pedig a legtöbb játékos nem kockáztatja meg.

Racionális játékos tehát nem játszik *szigorúan dominált stratégiákat*.

Az  $s_i'$  stratégia **szigorúan dominált** az  $s_i''$  stratégia által, ha a többi játékos stratégiáinak összes lehetséges kombinációja esetén az  $i$ -edik játékos kifizetése szigorúan kisebb az  $s_i'$  stratégiát játszva, mint ha az  $s_i''$  stratégiát játssza. Tehát

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \dots, s_n)$$

minden  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  esetére, amely előállítható a többi játékos  $S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n$  stratégiahalmazából, és ahol  $s_i'$  és  $s_i''$  az  $i$ -edik játékos két lehetséges stratégiája, tehát elemei  $S_i$ -nek.<sup>10</sup>

Vagyis egy stratégia akkor dominál egy másik stratégiát, ha minden esetben legalább olyan jó, és egy vagy több esetben jobb következménnyel jár, mint a másik stratégia. Ha minden esetben jobb következménnyel jár, mint a másik stratégia, akkor szigorú dominanciáról beszélünk.

<sup>10</sup> Gibbons, Robert: Bevezetés a játékelméletbe, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005. 12. o.

A fogolydilemma esetében az  $i$ -edik fogoly számára a „hallgat” stratégiát szigorúan dominálja a „vallani” stratégia, mivel minden stratégia esetén, amelyet a  $j$ -edik fogoly választhat, az  $i$ -edik fogoly kifizetése a „vallani” stratégia választása esetén nagyobb, mint a „hallgat” stratégia választásakor ( $-5 > -10$  illetve  $0 > -1$ ). Feltevésünk szerint, amit **dominancia-elvnek** is nevezhetünk: racionális játékos nem játszik szigorúan dominált stratégiát.

Egy  $A$  cselekedet végrehajtása ezen elv alapján akkor nevezhető racionálisnak, ha utána nem kerülünk rosszabb helyzetbe, mint ha az előttünk nyitva álló lehetőségek közül akármelyik másikat választottuk volna, és ha  $A$ -t játszunk, akkor annak lesz legalább egy olyan következménye, amelyben jobban járunk, mint ha másképp cselekedtünk volna.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

#### 10. A Fogolydilemma – bimátrixos ábrázolás

Az optimális stratégia keresését tehát nyugodtan korlátozhatjuk az egyes játékosok nem dominált stratégiáinak halmazára.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### 11. A Fogolydilemma – szigorúan dominált sorok ill. oszlopok kiküszöbölése

### Megoldás

Esetünkben a dominált sorok illetve oszlopok eltávolítása után mindkét játékosnak egy-egy stratégiája maradt, így ezek jelentik a játék megoldását. Mindkét fél a szigorúan domináns stratégiáját fogja játszani, vagyis vallani fog. Büntetésük, azaz a kifizetések (itt kardinális hasznosságot jelölnek a számok)  $-5$  és  $-5$  év lesz. Ez a játék egyetlen tiszta egyensúlypontja, amely azonban *nem-Pareto-optimális* állapot, vagyis *Pareto-inferior*. Ez azt jelenti, hogy létezik egy másik állapot, amely legalább egy személynek jobb és senkinek sem rosszabb, mint a meglévő. Jelen esetben ez a kedvezőbb állapot a  $(-1; -1)$ . A fogolydilemma érdekessége, hogy ezzel ellentétben mindhárom másik nem-egyensúly Pareto-optimális. Akkor nevezünk egy elosztást Pareto-optimálisnak, ha nincs olyan más megvalósítható

elosztás, amely mindenkit ugyanolyan helyzetben hagy, és legalább egyvalakit jobb helyzetbe hoz.

### **Alternatív megoldás <sup>11</sup>**

Mint azt az előbb láthattuk, az egyetlen Pareto-inferior egyensúlyponttal rendelkező játékokban az egyensúlyi stratégia követése ellentétben áll a „közösség” érdekével, mert egyaránt gyenge eredményt biztosít úgy az egyén, mint a játékosok összessége számára.

Érdekességképpen megemlíthetjük, hogy a világ nagy gondolkodói és bölcsei – Konfuciusz, Plátón, Arisztotelész, Seneca és Jézus – mind kísérletet tettek a fogolydilemma helyzetek elkerülésére illetve kedvezőbb megoldására, és a következő arany szabályt javasolták az egész problémakör megoldásának:

*„Amit akartok, hogy veletek tegyenek az emberek, ti is azt tegyétek velük.”*

Feltettük, hogy minden játékos azt akarja, hogy neki minél jobb legyen, ezen elv szerint tehát úgy kell cselekednünk, hogy a másinak minél jobb legyen. Ebben az esetben én azt akarnám, hogy a társam ne valljon, így én sem fogok vallani, tehát a kooperációt választom. Ha ezt az elvet univerzálissá lehetne tenni az emberek között, akkor az valóban garantálná a fogolydilemma helyzetek kedvezőbb kimenetelét: (-1; -1). A dolog kivihetlensége miatt azonban ezt csak egy ideális, szebb világban tudjuk valódi megoldásként elfogadni.

### **Többszörös fogolydilemma**

Az eredeti fogolydilemma azért annyira súlyos helyzet, mert csak egyetlen választási lehetőségem van, amellyel minden eldől. Tegyük fel azonban, hogy nem csak egyszer kerülünk ebbe a szituációba, hanem – amint ez a valóságban elterjedtebb – többszörös fogolydilemma helyzetbe kerülünk, vagyis többször kell majd döntést hoznunk ugyanazon játékpártnak ellen, s ezt a másik játékos is tudja, és emlékezni fog a döntéseinkre, mint ahogy mi is emlékezni fogunk az ő döntéseire. Ebben a sokmenetes fogolydilemmában már más megoldási módszert kell találnunk, ugyanis a másik játékos kétségtelenül annak megfelelően dönt majd a későbbiekben, hogy korábban mi milyen döntéseket hoztunk. Ha például az a kép alakul ki benne rólunk, hogy nem vagyunk együttműködő típusúak, akkor feltehetően ő sem lesz az, így viszont hosszú távon nagyon leromlanak az esélyeink a kedvező végekimenetelre.

---

<sup>11</sup> Mérő László: Mindenki másképp egyforma, Tericum Kiadó, 1996. 73. o.

Az én szándékom tehát elsősorban az, hogy meggyőzzem partneremet arról, hogy egy kooperatív ember vagyok, aki hajlandó hallgatni. Az ő célja is valószínűleg hasonló lesz. A többszörös fogolydilemma tehát már nem szükségszerűen vezet annyira lehangoló eredményre, mint az egyszeres helyzet; meggyőző kutatások vannak arról, hogy a „*feltételes kooperáció*” egy használható megoldás lehet.

### **Axelrod versenye**

1979-ben Robert Axelrod amerikai politológus számítógépes versenyt hirdetett, mely arra kereste a választ, hogy többszörös fogolydilemma helyzetekben van-e, és ha van, akkor mi a leghasználhatóbb versenyzési stratégia. A versenyre 14 pályázó küldött be programot. A megmérettetés úgy zajlott, hogy mindegyik programnak egy 200 lépésből álló fogolydilemma játékot kellett lejátszania először saját magával, majd a többivel és végül egy random programmal, amit mindenkinek előzetesen megküldtek.

A végeredményt nem befolyásolta sem a programkód hossza, sem pedig hogy mely tudományágban dolgozó kutató írta. Axelrod szerint a legsikeresebben szereplő programok mind „*barátságosak*” voltak, vagyis nem dezertáltak elsőként. A sikeres programok második legfontosabb tulajdonsága a „*megbocsátás*”, vagyis a kooperálásra való hajlandóság az ellenfél dezertálása ellenére is.

Anatol Rapoport programja lett a győztes, mely a „*Tit for Tat*” (*TFT*) nevet kapta, amely magyarul talán „szemet szemért, fogat fogért” elvnek fordítható, és a feltételes kooperáció elvén alapul: „nem vall” lépéssel kezd, s azután mindig azt lépi, amit az ellenfele lépett az előző lépésben. Mivel az adott közösség összetétele, vagyis a többi program viselkedése határozza meg, hogy mi számít jó viselkedésnek, ezért elméletileg még írható olyan program, amely jobb eredmény elérésére képes.

Noha összességében ez a program szerezte a legtöbb pontot a versenyben, külön-külön egyetlen stratégiát sem győzött le. Ennek tanulsága az, hogy egy többlépéses, többszereplős játékban nem feltétlenül kell mindig győzni ahhoz, hogy végül jó eredményt érjünk el. Axelrod érdeme továbbá az, hogy felhívta a figyelmet arra, hogy vannak olyan többlépéses interakciók, ahol a tiszta stratégiák véletlenszerű keverésénél eredményesebb megoldási módszerek is alkalmazhatók.



## Összefoglalás

A fogolydilemma megoldását a *szigorúan dominált stratégiák iterációs kiküszöbölésének* módszerével találtuk meg, mely azon a meggyőző ötleten alapul, hogy racionális játékosok nem játszanak szigorúan dominált stratégiákat. Ez egy jól használható módszer, ám vannak bizonyos korlátai. Ha a módszert tetszőleges lépésben szeretnénk alkalmazni, akkor fel kell tételnünk, hogy a játékosok racionalitása *közös tudás*, vagyis nem csak azt kell feltennünk, hogy a játékosok racionálisan gondolkodnak, hanem azt is, hogy minden játékos tudja, hogy minden játékos racionális, valamint azt is, hogy minden játékos tudja, hogy minden játékos tudja, hogy minden játékos racionális (és így tovább).

A másik probléma, hogy a játékok széles körében ez a módszer semmilyen előrejelzést nem ad a játék kimenetére. Vegyük például a következő bimátrixjátékot:

|               |   | Másik játékos |       |       |
|---------------|---|---------------|-------|-------|
|               |   | a             | b     | c     |
| Egyik játékos | X | 0 ; 4         | 4 ; 0 | 5 ; 3 |
|               | Y | 4 ; 0         | 0 ; 4 | 5 ; 3 |
|               | Z | 3 ; 5         | 3 ; 5 | 6 ; 6 |

12. Bimátrixjáték – normál formájú reprezentáció

Itt az előbb használt módszer segítségével nem jutunk előbbre, mert nincsenek szigorúan dominált sorok illetve oszlopok. Ezeknél a játékoknál már egy erősebb módszerre és megoldásfogalomra van szükségünk, ezért a következőkben bevezetjük a Nash-egyensúly definícióját.

## Nash-egyensúly

Az  $n$ -személyes  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$  normál formájú játékban az  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  stratégiák **Nash-egyensúlyt** alkotnak, amennyiben minden  $i$ -edik játékos számára az  $s_i^*$  stratégia az  $i$ -edik játékos legjobb válasza (vagy legalábbis egy a legjobbak közül) a másik  $n-1$  játékos adott  $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$  stratégiájára:

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

az  $S_i$ -ben szereplő minden lehetséges  $s_i$  stratégia esetére, tehát  $s_i^*$  a

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

optimumfeladat egyik megoldása.<sup>12</sup>

Vagyis minden játékos minden lehetséges stratégiája esetén jelöljük be a másik játékos legjobb választ az adott stratégiára. Az oszlopjátékos  $b$  stratégiájára például a sorjátékos legjobb válasza  $X$ , mert  $4$  nagyobb, mint  $0$  és  $3$ . Húzzuk alá a  $4$ -es számot. Ha az összes stratégia esetén elvégezzük ezt, akkor a következő táblázatot kapjuk:

|               |   | Másik játékos |              |                     |
|---------------|---|---------------|--------------|---------------------|
|               |   | a             | b            | c                   |
| Egyik játékos | X | 0 ; <u>4</u>  | <u>4</u> ; 0 | 5 ; 3               |
|               | Y | <u>4</u> ; 0  | 0 ; <u>4</u> | 5 ; 3               |
|               | Z | 3 ; 5         | 3 ; 5        | <u>6</u> ; <u>6</u> |

### 13. Bimátrixjáték – normál formájú reprezentáció

Egy stratégiapár akkor alkot Nash-egyensúlyt, ha a hozzájuk tartozó cellában mindkét kifizetés alá van húzva. A játék egyetlen tiszta Nash-egyensúlyát itt a  $(Zc)$  stratégiapár szolgáltatja a hozzá tartozó  $(6 ; 6)$  kifizetéssel.

### Előnyök

Elmondható, hogy ha egy stratégiapár Nash-egyensúlyt alkot, akkor az biztosan megmarad a szigorúan dominált stratégiák iterációs kiküszöbölése után is, ugyanakkor létezhetnek más stratégiák, amik szintén megmaradnak, ám nem alkotnak Nash-egyensúlyt. Ezáltal a Nash-egyensúly egy erősebb megoldásfogalom. Ha az iterációs kiküszöbölés után egyetlen stratégiapár marad, akkor az biztos, hogy Nash-egyensúlyt alkot.

<sup>12</sup> Gibbons, Robert: Bevezetés a játékelméletbe. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005. 15. o.

## **Hátrányok**

A több Nash-egyensúllyal rendelkező változó összegű játékokban jelentős problémák léphetnek fel. Ezekben a helyzetekben az egyensúlyi stratégia választásának elve önmagában nem garantálja, vagy éppen megakadályozza a jó eredmény elérését. Ennek részleteit a következő fejezetben mutatjuk be.

## 2. 2. 2. A csirkedilemma

### A trójai fogatverseny <sup>13</sup>

A bevezető részben szereplő reprezentációnk tárgya, a kubai rakétaválság szerkezetében nagyon hasonlít arra a játékra, amit Trójánál játszott két görög harcos több mint háromezer évvel ezelőtt. Meneláosz és Antilokhosz harci szekereikkel versenyeztek egy hirtelen szűkülő úton, melyről ír erről Homérosz az Iliászban:

„Meneláosz az út közepén hajtott, remélve, hogy senki sem fog megpróbálni túl közel menni kerekeihez, Antilokhosz azonban kiugratta lovait, és közvetlenül mellé állt. Meneláosz ettől megijedt, és rákiáltott:

»Antilokhosz, be vakon hajtasz, fékezd paripáid: itt épp szűk a szoros, tüstént tág úton előzhetsz: szétzúzódnak így, szekered szekerembe szaladhat. « ” <sup>14</sup>

Meneláosznak és Antilokhosznak egyaránt két stratégiája volt: kooperálás (K), azaz kitérés, a lovak visszafogása, vagy dezertálás (D), azaz a kitartás, a továbbhajtás. Feltételezhetjük, hogy a legrosszabb kimenetel mindkettejüknek az lenne, ha mindketten dezertálnak (DD), azaz mindketten továbbhajtanak: így összeütköznek, és valószínűleg halálukat lelik a lovak talpai alatt. A legjobb eredmény pedig az, ha én megnyerem a versenyt, tehát továbbhajtok, a másik pedig kooperál, tehát visszafogja a lovait (DK). Feltesszük továbbá, hogy a második legjobb következmény az, ha mindketten kooperálnak, azaz egyaránt visszafogják a lovaikat, így pedig döntetlen lesz a verseny végeredménye (KK). A harmadik legjobb (vagy második legrosszabb) kimenetel pedig az, ha elvesztem a versenyt, de életben maradok, vagyis kooperálok, a másik viszont dezertál, azaz továbbhajt (KD).

A következőképpen alakul így a játék nyereménymátrixa (a legjobb következményt 4-es jelöli, a második legjobbat 3-as, és így tovább):

---

<sup>13</sup> Schelling, T. C.: Arms and Influence. Yale University Press, 1966. 117.

<sup>14</sup> Homérosz: Iliász. Európa Könyvkiadó, 1985. Huszonharmadik ének

|             |                | Meneláosz           |                     |
|-------------|----------------|---------------------|---------------------|
|             |                | kitér (K)           | továbbhajt (D)      |
| Antilokhosz | kitér (K)      | 3 ; 3               | <u>2</u> ; <u>4</u> |
|             | továbbhajt (D) | <u>4</u> ; <u>2</u> | 1 ; 1               |

#### 14. A trójai fogatverseny - normál formájú reprezentáció

Ha jól megfigyeljük, akkor lecserélve Anthilokoszt „Egyesült Államokra”, Meneláoszt pedig „Szovjetunióra”, továbbá a startégiák neveit megfelelően átírva, pontosan a kubai rakétaválság reprezentációját kapjuk: a két görög harcos által játszott játék és a szuperhatalmak vetélkedésének nyereménymátrixa teljesen megegyezik. Mindkét játék egyaránt az ún. *csirkedilemma* (vagy *gyáva nyúl*) típusú játék egy-egy konkrét példája, amelyet a következmények fölötti preferenciáik struktúrája határoz meg:

$$(DK) > (KK) > (KD) > (DD).$$

Nevét pedig arról a veszélyes autós játékról kapta, ami az 1950-es években terjedt el az amerikai fiatalok körében: a két fél autóval egymás felé száguld, és aki kitér a másik elől, azt gyáva nyúlnak, vagy csirkének csúfolják.

### Játéktípusok

Az Iliász-beli trójai fogatverseny és az 1962-es kubai rakétaválság időben ugyan nagyon távol áll egymástól és a szereplők is teljesen eltérőek, de mindezen eltérések ellenére a két konfliktus belső szerkezete azonos. Ebből látható, hogy a játékelmélet egyik fontos szándéka és feladata az, hogy a különböző időben és eltérő körülmények között felmerülő problémákat valamiképpen absztrahálja: leválassa róluk azt, ami egyedi, ami helyhez és időhöz kötött, és beillessze a látszólag eltérő konfliktusokat egy egységes keretbe, és a felszínek különbözősége mögött meglássa azokat az általános mintázatokat, amik a dolgokban közösek.

Emiatt az játékelméleti szakember feladata az, hogy például a görög hősök és a huszadik századi szuperhatalmak között látszólag fennálló különbözőségek ellenére meglássa a két konfliktus közös struktúráját, azonos belső szerkezetét, vagyis azt, hogy a két probléma absztrakt módon ugyanabba a kategóriába esik.

Kétszemélyes 2x2-es játékok esetében összesen 78 féle egymástól lényegesen különböző táblázat létezik, közülük 12 olyan játék, melyben a játékosok szimmetrikus helyzetben vannak.

Ezek közül csak 4 tekinthető dilemmának, vagyis csapdahelyzetnek:

Fogolydilemma helyzetek:  $T > R > P > S$  (és  $2R > T + S$ )

Csirke-dilemma helyzetek:  $T > R > S > P$

Nemek harca helyzetek:  $T > S > P > R$

Vezérdilemma helyzetek:  $S > T > R > P$

Az elnevezéseknél áttértünk a szakirodalomban használatos jelöléshez: Sucker's payoff = (KD), Punishment for mutual defection = (DD), Reward for mutual cooperation = (KK), Temptation to defect = (DK).

## Megoldás

A trójai fogatversenynek, ami a csirke-dilemma-helyzet egy konkrét példája, két tiszta Nash-egyensúlyi helyzete van: a (KD) illetve a (DK), vagyis vagy Anthilokhosz tér ki egyoldalúan, vagy Meneláosz. Ebből következik, hogy mind a továbbhaladás, mind a kitérés racionális viselkedésnek számít. Több egyensúlyponttal rendelkező zérusösszegű játékoknál mindegy volt, hogy melyik egyensúlyt választják a játékosok, mert ugyanaz volt az értékük. Változó összegű játékoknál azonban előfordulhat, és itt elő is fordul, hogy az egyensúlypontok a játékosoknak különböző nyereményt biztosítanak / (2 ; 4) és (4 ; 2) /, ezért *nem ekvivalensek és nem felcserélhetők*.

A több különböző egyensúlypontot tartalmazó változó összegű játékokban ezért erős érdekellentét van a szereplők között, mert minden játékos azt akarja, hogy a neki kedvezőbb egyensúly következzen be. Jelen esetben erre a játékos egyetlen esélye az, ha teljesen világossá teszi a másik fél számára, hogy részéről a kooperáció szóba sem jöhet. A konfliktus megoldása szempontjából ugyanakkor fontos, hogy létezik-e minden játékos számára méltányos kimenetel vagy sem. Itt a méltányos kimenetel a (KK) állapot lenne a hozzátartozó (3 ; 3) kifizetéssel, amely egyben megfelel a biztonsági szintet maximalizáló elvnek is és Pareto-optimális állapot, viszont nem egyensúly. Ebből is láthatjuk, hogy változó összegű játékokban a maximin stratégiák nem feltétlenül vezetnek egyensúlyhoz.

A konfliktusnak létezik egy kevert egyensúlypontja is, amikor mindkét játékos egy meghatározott valószínűséggel választja a kitérést.

A következő kvadratikus programozási feladatot kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} & \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{x} &= 1 & \mathbf{1}^T \mathbf{y} &= 1 \\ \mathbf{A} \mathbf{y} &\leq \alpha \mathbf{1} & \mathbf{B}^T \mathbf{x} &\leq \beta \mathbf{1} \\ \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{y} - \alpha - \beta &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

#### 15. Bimátrixjáték – Kvadratikus programozási feladat kapcsolata <sup>15</sup>

Egy  $\mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{y}^*$  stratégiapár akkor és csak akkor egyensúlypontja a bimátrixjátéknak az  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  megfelelő kifizetőfüggvény-értékekkel, ha  $\mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{y}^*$ ,  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  optimális megoldása az előbbi kvadratikus programozási feladatnak, amelyben az optimális célfüggvényérték zérus.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 16. A trójai fogatverseny – bimátrixos ábrázolás

Ekkor a programozási feladat a következő alakú:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, y_1, y_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ y_1 + y_2 &= 1 \\ 3y_1 + 2y_2 - \alpha &\leq 0 \\ 4y_1 + 1y_2 - \alpha &\leq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - \beta &\leq 0 \\ \underline{4x_1 + 1x_2 - \beta} &\leq 0 \\ 6x_1y_1 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 2x_2y_2 - \alpha - \beta &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

A keresett kevert stratégiapár:

<sup>15</sup> Szidarovszky F. – Molnár S.: Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó, 1986. 38. o.

$$\mathbf{x} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \beta = 2,5 ;$$

$$\mathbf{y} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \alpha = 2,5 ;$$

Mivel ez a megoldás kielégíti a feltételrendszert, és a hozzátartozó célfüggvényérték is 0, ez egy optimális megoldása a kvadratikus programozási feladatnak, így egyensúlypont is. Ez alapján azt javasolhatjuk, hogy mindkét játékos 0,5 valószínűséggel keverje a két tiszta stratégiáját. A játékos értéke  $v = \alpha = 2,5$ .

## Összefoglalás

Amint azt az előzőekben láttuk, megtörténhet hogy egy változó összegű játéknak több, egymással nem ekvivalens Nash-egyensúlya is létezik. Így a zérusösszegű játékokkal ellentétben itt az is előfordulhat, hogy minden játékos egyensúlyi stratégiát játszik, mégsem alakul ki egyensúlyi állapot. Ha például Antilokhosz a D stratégiáját játssza, és Meneláosz is a D stratégiáját választja (mindkettő egyensúlyi stratégia), akkor a játék legrosszabb kimenetele adódik (1;1), ami ráadásul nem is egyensúlyi állapot.

**Nash tétele** szerint, ha a  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$   $n$ -személyes normál formájú játékban  $n$ , valamint minden  $S_i$  véges, akkor a játéknak mindig van legalább egy Nash-egyensúlya (esetleg kevert stratégiákban). Az előbb jelzett probléma miatt azonban a Nash-egyensúly nem alkalmas arra, hogy általános megoldásfogalommal váljon. Nem tudunk ugyanis tanácsot adni a játékosoknak arról, hogy több eltérő Nash-egyensúly közül melyiket érdemes választani. Így előrejelzést sem tudunk adni afelől, hogy a játékosok a valóságban melyik stratégiát fogják játszani.

Érdekességgéppen megemlíthetjük, hogy a valóságban a kubai rakétaválság a (DK) kimenetellel végződött, vagyis az amerikai fenyegetés hatására a szovjetek kivonták a rakétáikat Kubából. Homérosz Iliászában is a (DK) kimenetel következett be, vagyis Antilokhosz továbbhajtott, mintha nem hallotta volna a felszólítását, s ezért Meneláosz kénytelen volt kitérni. Elmondható, hogy a csirkedillemben általában az egyik vagy mindkét fél kitérésével végződnek.



### 2. 2. 3. A visszahívás dilemmája

Az előző részben láthattuk, hogy a több különböző értékű Nash-egyensúlyt tartalmazó változó összegű játékok nem oldhatók meg egyértelműen. Arról azonban nem szóltunk, hogy az azonos egyensúlyi helyzeteket tartalmazó játékokban is adódhatnak gondok. A visszahívás dilemmája erre nyújt példát.

Képzeljük el, hogy egy telefonbeszélgetés közepén a vonal hirtelen megszakad. Ekkor mindkét félnek két lehetősége van: vagy tárcsáz, vagy várakozik. Ha mindketten tárcsáznak, akkor mindketten foglalt jelzést kapnak. Ha mindketten várnak, akkor megintcsak nem fogják tudni folytatni a beszélgetést. A legjobb helyzet az, ha egyvalaki tárcsáz, a másik pedig várakozik.

A játék táblázata így a következő:

|       |               | Másik       |               |
|-------|---------------|-------------|---------------|
|       |               | tárcsáz (T) | várakozik (V) |
| Egyik | tárcsáz (T)   | 0 ; 0       | 1 ; 1         |
|       | várakozik (V) | 1 ; 1       | 0 ; 0         |

17. A visszahívás dilemmája - normál formájú reprezentáció

#### Megoldás

A játék két tiszta Nash-egyensúlya a (TV) illetve a (VT), így a „tárcsáz” is és a „várni” is egyensúlyi stratégia. A kérdés csak az, hogy melyiket válasszák a játékosok. Mivel ez egy több, egymással ekvivalens egyensúlypontot tartalmazó inerakció, ezáltal a játékban nincs érdekkonfliktus, viszont ennek ellenére a játékosok csak akkor érhetnek el jó eredményt, ha ugyanarra az egyensúlyi helyzetre törekednek.

Az egyensúlyi stratégia követése tehát olyan helyzetekben sem biztos, hogy egyensúlyi állapothoz vezet, ahol több, egyformán kívánatos Nash-egyensúly létezik, s közülük kell választani.

A visszahívás dilemmájának létezik kevert egyensúlypontja is.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 18. A visszahívás dilemmája – bimátrixos ábrázolás

A kevert stratégiapár meghatározásához a következő programozási feladatot kell megoldanunk:

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_2 - \alpha \leq 0$$

$$y_1 - \alpha \leq 0$$

$$x_2 - \beta \leq 0$$

$$\underline{x_1 - \beta \leq 0}$$

$$2x_1y_2 + 2x_2y_1 - \alpha - \beta \rightarrow \max.$$

A megoldás az lesz, hogy a játékosoknak  $1/2$  valószínűséggel kell keverniük a tiszta stratégiáikat az optimális eredmény eléréséhez. A játék értéke így  $v = \alpha = 0,5$ .

Az ilyen helyzetek megoldásában az is segíthet, ha a felek előre egyeztetik egymással, hogy ilyen esetekben hogyan fognak viselkedni, vagyis megállapodnak valamilyen szabályban, pl. hogy mindig a hívó fél tárcsáz újra.

### 3. fejezet

## Összefoglalás

Az első fejezetben bemutattuk a zérusösszegű játékokat, és megvizsgáltuk megoldási lehetőségeiket. A biztonsági szintet maximalizáló minimax illetve maximin stratégiák segítségével egy jól használható megoldási módszert mutattunk be, mely a kevert stratégiák és a várható vagy átlagos nyereség fogalmának bevezetésével a nyeregpont nélküli játékokban is biztosította az optimális stratégia megtalálását. Megállapítottuk, hogy zérusösszegű játékok egyensúlypontjai ekvivalensek egymással és felcserélhetőek, valamint, hogy minden mátrixjátékra írható megfelelő lineáris programozási feladat, mellyel a játék összes egyensúlypontja meghatározható. A kevert stratégiákkal kapcsolatban ismertettünk néhány felmerült problémát, mely az elmélet alkalmazhatóságát kicsit gyengítette.

A második fejezetben a változó összegű játékok esetében felmerülő problémákat vizsgáltuk. A zérusösszegű játékokban használt módszerek itt nem jártak sikerrel, ezért újabb módszereket ismertettünk. Bemutattuk, hogy milyen összefüggés van a bimátrixjátékok és a kvadrátikus programozási feladat optimális megoldása között. A szigorúan dominált stratégiák iterációs kiküszöbölésének módszerével sikerült megtalálnunk a fogolydilemma megoldását, ezután pedig bevezettük a Nash-egyensúly fogalmát, mely egy erősebb megoldásfogalomnak bizonyult, ugyanakkor a több Nash-egyensúllyal rendelkező játékokra nem tudtunk egyértelmű megoldást adni.

A játékelméleti dilemmák bemutatásával megpróbáltunk rávilágítani arra, hogy egy-egy adott szituációban nem mindig a racionális döntés biztosítja a legnagyobb nyereséget, s megkíséreltük bemutatni, hogy az egyensúlyi stratégiák választásának elve nem minden esetben garantálja, sőt néha éppen megakadályozza a jó eredmény elérését.

Egy játékot **megoldhatónak** nevezünk, ha minden egyensúlypontja rendelkezik az ekvivalencia és felcserélhetőség tulajdonságokkal, és **szigorúan megoldhatónak** nevezünk, ha megoldható és van domináns vagy Pareto-optimális egyensúlyi helyzete.

Megmutattuk, hogy sok játék ilyen értelemben nem megoldható, azaz a játékelmélet nem minden esetben tud tanácsot adni a játékosoknak a stratégiaválasztást illetően. Szomorúan megállapítjuk, hogy nem létezik olyan módszer, amely minden esetben segítségünkre lehetne.

De „abból, hogy a játékelmélet nem ad egyértelmű megoldást a játékok bizonyos típusai esetében, még nem kell arra következtetni, hogy az elmélet hibás, vagy nincs megfelelően kidolgozva. Lehet, hogy ilyen a dolgok valódi természete.”<sup>16</sup>

Mérő László szavaival zárjuk megállapításainkat: „Az újabb és újabb problémák megoldásához mindig is a racionalitás újabb és újabb formáit leszünk kénytelenek megtalálni.”<sup>17</sup>

---

<sup>16</sup> Bacharach, M.: Economics and the Theory of Games, CO: Westview Press, 1977.

<sup>17</sup> Mérő László: Mindenki másképp egyforma, Tericum Kiadó, 1996. 97. o.

## TÁBLÁZAT- ÉS KÉPLETJEGYZÉK

|   |    |
|---|----|
| 1. A kubai rakétaválság - játékfa formájú reprezentáció.....                    | 12 |
| 2. A kubai rakétaválság - normál formájú reprezentáció.....                     | 12 |
| 3. Az első világháború kitörése - normál formájú reprezentáció.....             | 16 |
| 4. Az első világháború kitörése - mátrixos ábrázolás.....                       | 16 |
| 5. Az első világháború kitörése – minimax és maximin stratégiák.....            | 18 |
| 6. Kő-Papír-Olló játék - normál formájú reprezentáció.....                      | 21 |
| 7. Mátrixjáték – Lineáris programozási feladat kapcsolata .....                 | 23 |
| 8. Lineáris programozási feladatpár.....  | 23 |
| 9. A Fogolydilemma - normál formájú reprezentáció.....                          | 28 |
| 10. A Fogolydilemma – bimátrixos ábrázolás .....                                | 30 |
| 11. A Fogolydilemma – szigorúan dominált sorok ill. oszlopok kiküszöbölése..... | 30 |
| 12. Bimátrixjáték – normál formájú reprezentáció.....                           | 33 |
| 13. Bimátrixjáték – normál formájú reprezentáció.....                           | 34 |
| 14. A trójai fogatverseny - normál formájú reprezentáció.....                   | 37 |
| 15. Bimátrixjáték – Kvadratikusan programozási feladat kapcsolata .....         | 39 |
| 16. A trójai fogatverseny – bimátrixos ábrázolás.....                           | 39 |
| 17. A visszahívás dilemmája - normál formájú reprezentáció.....                 | 41 |
| 18. A visszahívás dilemmája – bimátrixos ábrázolás.....                         | 42 |

## IRODALOMJEGYZÉK

- Bacharach, M.: Economics and the Theory of Games. CO: Westview Press, 1977.
- Brams, J. S.: Superpover Games. Yale University Press, 1985.
- Gibbons, Robert: Bevezetés a játékelméletbe. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.
- Luce, R. D. – Raiffa, H.: Games and Decisions. Wiley, 1957.
- Mérő László: Mindenki másképp egyforma – A játékelmélet és a racionalitás pszichológiája. Tericum Kiadó, 1996.
- Norvig, P. – Russell, S. J.: Mesterséges Intelligencia - Modern megközelítésben. Panem Kiadó, 2006.
- Sainsbury, R. M.: Paradoxonok. Typotex Kiadó, 2002.
- Schelling, T. C.: Arms and Influence. Yale University Press, 1966.
- Snyder, G. H. – Diesing, P.: Conflict Among Nations. Princeton University Press, 1977.
- Szép Jenő – Forgó Ferenc: Bevezetés a játékelméletbe. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1974.
- Szidarovszky Ferenc – Molnár Sándor: Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal. Műszaki Könyvkiadó, 1986.
- Tóth I. János: Játékelmélet és társadalom. JATEPress, 1997.
- Williams, J. D.: Játékelmélet. Műszaki Könyvkiadó, 1972.
- Zagare, F. C.: Játékelmélet – Fogalmak és alkalmazások. Helikon Kiadó, 2006.